Методика обучения решению уравнений учащихся

Михайлова Т.В.
учитель математики ГБОУ СШ №641

Уравнения в школьном курсе алгебры занимают ведущее место. На их изучение отводится времени больше, чем на любую другую тему. Действительно, уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее большинство задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений. Овладевая способами их решения, мы находим ответы на различные вопросы из науки и техники (транспорт, сельское хозяйство,промышленность, связь и т. д.). Так же для формирования умения решать уравнения большое значение имеет самостоятельная работа учащегося при обучении решения уравнений.

Проблема методики формирования умений решать уравнения является актуальной для учителей всех школьных предметов, в том числе и для учителей математики. Ее решение важно еще и с той точки зрения, что для успешного овладения современным содержанием школьного математического образования необходимо повысить эффективность процесса обучения в направлении активизации деятельности учащихся. Важным является раскрытие процесса формирования умений и навыков решения уравнений.

Рассмотрим вопросы связанные с изучением уравнений в курсе математики.

1. Изучить психолого - педагогическую и методическую литературу, Касающуюся изучению уравнений. Проанализировать школьные учебники и выделить в них место уравнений.

2. Составить конспекты уроков обучения решения различных видов уравнений с использованием самостоятельной работы.

3. Разработать самостоятельных работ для учащихся по различным темам уравнений.

Теоретические аспекты обучению уравнений

Из истории возникновения уравнений.

Алгебра возникла в связи с решением разнообразных задач при помощи уравнений. Обычно в задачах требуется найти одну или несколько неизвестных, зная при этом результаты некоторых действий, произведенных над искомыми и данными величинами. Такие задачи сводятся к решению одного или системы нескольких уравнений, к нахождению искомых с помощью алгебраических

действий над данными величинами. В алгебре изучаются общие свойства действий над величинами.

Некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4000 лет назад в Древнем Вавилоне.

Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н. э. вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных,полные квадратные уравнения:

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает, по существу, с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены.

Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

Квадратные уравнения у ал-Хорезми

В алгебраическом трактате ал-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) «Квадраты равны корням», т. е. ax2 = bx.

2) «Квадраты равны числу», т. е. ax2 = c.

3) «Корни равны числу», т. е. ax = c.

4) «Квадраты и числа равны корням», т. е. ax2 + c = bx.

5) «Квадраты и корни равны числу», т. е. ax2 + bx =c.

6) «Корни и числа равны квадратам», т. е. bx + c == ax2.

Для ал-Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал-джабр и ал-мукабала. Его решение, конечно, не совпадает полностью с нашим. Уже не

говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида ал-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений ал-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства.

Приведем пример.

Задача 14. «Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень»

(подразумевается корень уравнения $x2 + 21 = 10x$).

Решение автора гласит примерно так: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Трактат ал-Хорезми является первой дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

Содержание и роль линии уравнений в современном школьном курсе математики

Материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Это объясняется тем, что уравнения широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач.

Истоки алгебраических методов решения практических задач связаны с наукой древнего мира. Как известно из истории математики, значительная часть задач математического характера, решаемых египетскими, шумерскими, вавилонскими писцами-вычислителями (XX—VI вв. до н. э.), имела расчетный характер. Однако уже тогда время от времени возникали задачи, в которых искомое значение величины задавалось некоторыми косвенными условиями, требующими, с нашей современной точки зрения, составления уравнения или системы уравнений. Первоначально для решения таких задач применялись арифметические методы. В дальнейшем начали формироваться начатки алгебраических представлений. Например, вавилонские вычислители умели решать задачи, сводящиеся с точки зрения современной классификации к уравнениям второй степени. Таким образом, был создан метод решения текстовых задач, послуживший в дальнейшем основой для выделения алгебраического компонента и его независимого изучения.

Это изучение осуществлялось уже в другую эпоху сначала арабскими математиками (VI—X вв. н. э.), выделившими характерные действия, посредством которых уравнения приводились к стандартному виду (приведение подобных членов, перенос членов из одной части уравнения в другую с переменой знака), а затем европейскими математиками Возрождения, в итоге длительного поиска создавшими язык современной алгебры (использование букв, введение символов арифметических операций, скобок и т. д.). На рубеже

XVI—XVII вв. алгебра как специфическая часть математики, обладающая своим предметом, методом, областями приложения, была уже сформирована. Дальнейшее ее развитие, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики. В этом процессе все яснее становилась важность роли, которую играло понятие уравнения в системе алгебраических понятий.

Открытие координатного метода (Декарт, XVII в.) и последовавшее за ним развитие аналитической геометрии позволили применить алгебру не только к задачам, связанным с числовой системой, но и к изучению различных геометрических фигур. Эта линия развития алгебры упрочила положение уравнения как ведущего алгебраического понятия, которое связывалось теперь уже с тремя главными областями своего возникновения и функционирования:

a) уравнение как средство решения текстовых задач;

b) уравнение как особого рода формула, служащая в алгебре объектом изучения;

c) уравнение как формула, которой косвенно определяются числа или координаты точек плоскости (пространства), служащие его решением.

Каждое кз этих представлений оказалось в том или ином отношении полезным.

Таким образом, уравнение как общематематическое понятие многоаспектно, причем ни один из аспектов нельзя исключить из рассмотрения, особенно если речь идет о проблемах школьного математического образования.

Ввиду важности и обширности материала, связанного с понятием уравнения, его изучение в современной методике математики организовано в содержательно

- методическую линию — линию уравнений и неравенств. Здесь рассматриваются вопросы формирования понятий уравнения и неравенства, общих и частных методов их решения, взаимосвязи изучения уравнений и неравенств с числовой,

функциональной и другими линиями школьного курса математики.

Выделенным областям возникновения и функционирования понятия уравнения в алгебре соответствуют три основных направления развертывания линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

а) Прикладная направленность линии уравнений раскрывается главным образом при изучении алгебраического метода решения текстовых задач. Этот метод широко применяется в школьной математике, поскольку он связан с обучением приемам, используемым в приложениях математики.

В настоящее время ведущее положение в приложениях математики занимает математическое моделирование. Используя это понятие, можно сказать, что прикладное значение уравнений, их систем определяется тем, что они являются основной частью математических средств, используемых в математическом моделировании.

б) Теоретико-математическая направленность линии уравнений раскрывается в двух аспектах: во-первых, в изучении наиболее важных классов уравнений, и их систем и, во-вторых, в изучении обобщенных понятий и методов, относящихся к линии в целом. Оба эти аспекта необходимы в курсе школьной математики. Основные классы уравнений связаны с простейшими и одновременно наиболее важными математическими моделями. Использование обобщенных понятий и методов позволяет логически упорядочить изучение линии в целом, поскольку они описывают то общее, что имеется в процедурах и приемах решения, относящихся к отдельным классам уравнений, неравенств, систем. В свою очередь, эти общие понятия и методы опираются на основные логические понятия: неизвестное, равенство, равносильность, логическое следование,

которые также должны быть раскрыты в линии уравнений

в) Для линии уравнений характерна направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики. Эта линия тесно связана с числовой линией. Основная идея, реализуемая в процессе установления взаимосвязи этих линий,— это идея последовательного расширения числовой системы. Все числовые области, рассматриваемые в школьной алгебре и началах анализа, за

исключением области всех действительных чисел, возникают в связи с решением каких-либо уравнений и их систем. Области иррациональных и логарифмических выражений связаны соответственно с уравнениями xk = b (k – натуральное число, большее 1) и ax=b.

Связь линии уравнений с числовой линией двусторонняя. Приведенный пример показывает влияние уравнений на развертывание числовой системы. Обратное влияние проявляется в том, что каждая вновь введенная числовая область расширяет возможности составления и решения различных уравнений. Например,

введение арифметического квадратного корня из рациональных чисел позволяет записывать корни не только уравнений вида x2 = b, где b—неотрицательное рациональное число, но и любых квадратных уравнений с рациональными коэффициентами и неотрицательным дискриминантом. Линия уравнений тесно связана также и с функциональной линией. Одна изважнейших таких связей — приложения методов, разрабатываемых в линии уравнений, к исследованию функции (например, к заданиям на нахождение области определения некоторых функций, их корней, промежутков знакопостоянства и т. д.). С другой стороны, функциональная линия оказывает существенное влияние как на содержание линии уравнений и неравенств, так и на стиль ее изучения. В частности, функциональные представления служат основой привлечения графической наглядности к решению и исследованию уравнений, неравенств и их систем. С функциональной линией непосредственно связан также и небольшой круг вопросов школьного курса математики, относящихся к дифференциальным и функциональным уравнениям. Сама возможность возникновения дифференциального уравнения кроется в наличии операции дифференцирования (может быть поставлен вопрос о нахождении для заданной функции (другой функции F, такой, что F' (x)=f (x)).

Однако сама по себе возможность выделения дифференциальных уравнений в школьном курсе математики еще не следует из того факта, что имеются формальные основания для их рассмотрения. Как известно, теория дифференциальных уравнений обладает большой сложностью. В школьном обучении эта теория представлена лишь своими начальными частями, которые не образуют связного целого, а относятся к различным конкретным, по большей части прикладным вопросам.

В школьной математике большую роль играет компонент, при котором уравнение трактуется как равенство двух функций. Его роль проявляется в изучении графического метода решения уравнений. Однако в известных нам учебниках алгебры этот компонент не кладется в основу определения уравнения.

Еще один подход к определению понятия уравнения получается при сопоставлении области определения уравнения и множества его корней. Обычно множество корней уравнения — собственное подмножество его области определения. С другой стороны, при решении уравнений приходится использовать преобразования, которые опираются на тождества, т. е. на равенства, истинные на всей области определения. Выделенное здесь противопоставление тождества и уравнения может быть положено в основу определения уравнения.

Формирование понятия уравнения требует использования еще одного термина: «решить уравнение». Различные варианты его определения отличаются друг от друга, по существу, только наличием или отсутствием в них термина «множество».

Таким образом, при освоении понятия уравнения необходимо использовать термины «уравнение», «корень уравнения», «что значит решить уравнение». При этом наряду с компонентами понятия уравнения, входящими в текст определения, надо включать и все другие его компоненты по мере развертывания материала данной линии.

В определении понятия уравнения используется один из двух терминов: «переменная» или «неизвестное». Различие между ними состоит в том, что переменная пробегает ряд значений, не выделяя ни одного из них специально, а неизвестное представляет собой буквенное обозначение конкретного числа (поэтому этим термином удобно пользоваться при составлении уравнений по текстовым задачам). Так,с термином «переменная» связана операция подстановки числа вместо буквы, поэтому в уравнение a(x)=b[x) можно подставлять вместо x конкретные числа и находить среди них корни. Термин же «неизвестное» обозначает фиксированное число; подставлять число на место буквы, обозначающей неизвестное, поэтому нелогично. Нахождение корней уравнения a{x)=b{x) с этой точки зрения должно осуществляться с помощью действий, при которых это равенство рассматривают как верное и пытаются привести его к виду x=x0, где x0 — числовое выражение.

При описании методики мы будем пользоваться термином «неизвестное», который ближе, чем «переменная», связано с алгебраическим методом решения текстовых задач и тем самым с прикладной направленностью линии уравнений и неравенств.